ŘEŠENÍ

Cvičení 1. Předpokládáme, že $a \geq 5$.

(a) Víme, že $X \sim Hypergeom(100, a, 5)$. Náhodnou veličinu X můžeme vyjádřit jako $X = \sum_{i=1}^{5} Y_i$, kde $Y_i \sim Alt(a/100), i = 1, ..., 5$.

(b) Nezávislost Y_i, Y_j pro $i \neq j$ můžeme ověřit z definice výpočtem sdruženého rozdělení.

Y_i \ Y_j	0	1
0	$\left(1 - \frac{a}{100}\right)\left(1 - \frac{a}{99}\right)$	$\left(1 - \frac{a}{100}\right)\frac{a}{99}$
1	$\frac{a}{100}\left(1 - \frac{a-1}{99}\right)$	$\frac{a}{100}\frac{a-1}{99}$

Zde jsme využili definici podmíněné pravděpodobnosti, tj. $\mathbb{P}(Y_i = a, Y_j = b) = \mathbb{P}(Y_i = a)\mathbb{P}(Y_j = b|Y_i = a)$. Náhodné veličiny nejsou nezávislé, neboť například

$$\mathbb{P}(Y_i = 1, Y_j = 1) = \frac{a}{100}\frac{a-1}{99} \neq \frac{a}{100}\frac{a}{100} = \mathbb{P}(Y_i = 1)\mathbb{P}(Y_j = 1).$$

Ze sdruženého rozdělení také dostaneme

$$\operatorname{cov}(Y_i, Y_j) = \frac{a}{100}\frac{a-1}{99} - \left(\frac{a}{100}\right)^2$$

(c)

$$\operatorname{var}X = \sum_{i=1}^{5} \operatorname{var}Y_i + \sum\sum\nolimits_{i \neq j} cov(Y_i, Y_j) = 5\left(\frac{a}{100}\right)\left(\frac{(100-5)(100-a)}{100 \cdot 99}\right)$$

Cvičení 2. (a) Odhad metodou momentů je

$$\hat{\theta}_n = \bar{X}_n - 1$$

(b) Odhad je nestranný a za použití zákona velkých čísel a věty o spojité transformaci je konzistentním odhadem parametru θ.

(c) Použitím centrální limitní věty pro náhodný výběr $X_1, X_2, ...$ dostaneme, že potřebujeme alespoň 129 pozorování.

Cvičení 3. (a)

X \ Y	0	1
0	$p - \frac{1}{20}$	$\frac{1}{4} - p$
1	$\frac{4}{5} - p$	p

Náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé, pokud $p = 1/5$.

(b) Použitím centrální limitní věty pro náhodný výběr $Z_1, ..., Z_{36}$, kde $Z_i = X_i \cdot Y_i$ dostaneme

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{36} > 6\right) \approx 0.691.$$

(c) $p = 3/10$, $\mathbb{P}(Y = 1|X = 1) = 3/8$.

(d) Stejně jako v (b) dostaneme

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{36} > 6\right) \approx 0.96.$$